Konvergente Reihenentwicklungen und singuläre Potentiale in der Quantenfeldtheorie. I

Von Werner Güttinger *

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforschg. **10a**, 257—266 [1955]; eingegangen am 3. Februar 1955)

Es wird gezeigt, daß durch den Begriff der Pseudofunktion divergenten Reihen der Quantentheorie ein Konvergenzsinn beigelegt werden kann, der auch dort zu sinnvollen Aussagen führt, wo die bisherigen Störungsentwicklungen Divergenzen liefern. Die Methode wird an einigen charakteristischen Problemen (Infrarotdivergenzen, Entwicklung gebundener Zustände nach dem Kopplungsparameter) demonstriert. Endliche Fourier-Transformationen für singuläre Potentiale, wie $\exp(-\alpha r)/r^n$, werden angegeben. Eine iterative Behandlung der Integralgleichungen der Feldtheorie wird im zweiten Teil durchgeführt.

Die Form der gegenwärtigen Quantenfeldtheorie ist keinesfalls befriedigend, solange noch Bezug auf divergente Größen genommen werden muß. Die Forderung nach einer mathematisch strengen Darstellung der singulären Größen der Quantentheorie läßt sich durch Benützung der Distributionstheorie und des Pseudofunktionsbegriffs erfüllen. Die Distributionsanalysis ermöglicht eine strenge Lösung von Wellen- und Potentialgleichungen in der Quantentheorie. Dabei zeigt sich [1, 2], daß die Lösungen von Gleichungen wie $\triangle\varphi=\delta$, $\Box\psi=\delta$, keineswegs die bisher angenommene Struktur haben ($\varphi\sim 1/r$, $\psi\sim 1/x_\nu{}^2$). Die mathematisch strengen Lösungen sind spezielle Distributionen, die man als Pseudofunktionen bezeichnet. Im Bereich außerhalb des Quellpunktes bzw. des Lichtkegels stimmen diese strengen Lösungen mit den bekannten Potential- und Wellenfunktionen überein, sie weichen von letzteren jedoch grundsätzlich ab hinsichtlich ihrer Struktur und ihres Transformationsverhaltens in den „singulären" Punkten ihres Definitionsbereiches. Der Pseudofunktionsbegriff ermöglicht ferner eine Behandlung divergenter Reihen der Feldtheorie, wenigstens in denjenigen Fällen, wo die Reihenglieder divergieren. Wie an anderer Stelle gezeigt wurde [3], ist es möglich, eine strenge Theorie für Produkte von Feldoperatoren und Greenschen Funktionen zu konstruieren und damit die weitergehende Forderung nach einer Definition solcher Produkte, die wesentlich durch die Wechselwirkungskonzeption und die Quantisierung bedingt ist, zu erfüllen. Eine darauf aufbauende Feldtheorie weicht von der bisherigen ab, liefert jedoch als Grenzfall die Renormierungstheorie.

Nach einer Einführung in die Theorie der Pseudofunktionen werden in Teil I dieser Arbeit die wichtigsten Eigenschaften der Pseudofunktionen diskutiert, insbesondere ihr eigenartiges Verhalten bei Koordinatentransformationen. Für die Fourier-Transformierten singulärer Potentiale, wie

$$\exp(-\alpha r)/r^n ,$$

werden konvergente Ausdrücke erhalten. Im Teil II wird der Pseudofunktionsbegriff auf charakteristische divergente Reihen der Feldtheorie angewandt. Es folgt insbesondere, daß die Fourier-Transformierte einer Entwicklung wie $\Sigma c_n/x^n$ immer konvergiert, auch wenn die Reihe $\Sigma c_n/x^n$ überall (exklusive $x=\infty$) divergiert. Am Schwingerschen Massenoperator wird dann die Ursache für die Infrarotdivergenzen aufgewiesen, die sich mittels des Pseudofunktionsbegriffs beseitigen lassen — einfach deswegen, weil diese Divergenzen durch unzulässige, aber durch den Pseudofunktionsbegriff hebbare Benützung von Reihenentwicklungen außerhalb ihres Konvergenzbereiches erzeugt werden. Ferner diskutieren wir die bei der iterativen Lösung der Integralgleichungen der Feldtheorie auftretenden Divergenzen und weisen in diesem Zusammenhang

* Jetzt Instituto de Fisica Teorica, Rua Pamplona 145, Sao Paulo, Brasilien.

[1] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, Paris, 1950/51; G. de Rham u. K. Kodaira, Harmonic Integrals, Princeton Lectures 1952; W. Güttinger, Phys. Rev. **89**, 1004 [1953] (zitiert als A); T. Takahashi, Progr. Theor. Phys. **11**, 1 [1954].

[2] L. Schwartz, Ann. Inst. Fourier **2**, 17 [1952], Math. Rev. **13**, 352 [1952]; P. D. Methée, Comm. Helv. Math. **28** [1954].

[3] W. Güttinger, Progr. Theor. Phys., im Druck.

die Entwickelbarkeit eines gebundenen Zustandes nach der Kopplungskonstanten nach. Durch die Singularitäten der Operatoren, welche das physikalische System beschreiben, werden systemeigene Einheiten ausgezeichnet, die durch die Theorie der Pseudofunktionen beschrieben werden können. Es ist damit in mathematisch strenger und physikalisch sinnvoller Weise möglich, Störungsentwicklungen, die im Rahmen des konventionellen Formalismus divergieren, zur Konvergenz zu bringen. Es sei noch erwähnt, daß durch Anwendung der Pseudofunktionstheorie die divergenten Renormierungsintegrale der Feldtheorie endlich werden. Dennoch können keine eindeutigen Werte für diese Größen angegeben werden, da die eingehenden Produkte „uneigentlicher" Operatoren mathematisch notwendigerweise mehrdeutig sind[3].

In einem folgenden zweiten Teil dieser Arbeit wird die durch den Pseudofunktionsbegriff ermöglichte, konvergente iterative Lösung der Integralgleichungen der Feldtheorie näher untersucht.

I. Pseudofunktionen und singuläre Potentiale

Der Begriff Pseudofunktion (Pf) wird durch die Distributionsanalysis[1, 2] eingeführt. Man versteht unter einer Distribution $T = T_x$ einen linearen Operator, welcher den Raum D aller unbeschränkt oft differenzierbaren Funktionen $\varphi(x)$ auf einen Zahlenraum abbildet. Dabei ist D der Raum aller dieser Funktionen $\varphi(x)$, die mit allen ihren Ableitungen $\varphi^{(n)}(x) = \mathrm{d}^n\varphi/\mathrm{d}x^n$ außerhalb eines endlichen Bereiches verschwinden: $\varphi^{(n)}(\pm\infty) = 0$. Eine Distribution T kann daher durch ein lineares Funktional $T[\varphi]$ dargestellt werden, und diese Distributionen bilden einen linearen Vektorraum. Einer summablen Funktion $f(x)$ wird dabei die spezielle Distribution

$$f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, \varphi(x)$$

zugeordnet. Jede Distribution ist unbeschränkt oft differenzierbar; die n-te Ableitung von $T[\varphi]$ ist definiert durch

$$T^{(n)}[\varphi] = (-1)^n\, T[\varphi^{(n)}],$$

und insbesondere entsprechen den Diracschen $\delta^{(n)}$-„Funktionen" die Distributionen $\delta^{(n)}[\varphi] = (-1)^n \cdot \varphi^{(n)}(0)$. Pseudofunktionen sind nun solche Distributionen, welche nichtsummierbaren Funktionen (z. B. $1/x^n$) zugeordnet sind. Sei $f_+(x)$ eine Funktion definiert durch $f_+(x) = f(x)$ für $x > 0$, $f_+(x) = 0$ für $x < 0$. Geht man nun aus von der Distribution $T[\varphi] = (\lg x)_+[\varphi]$, die der Funktion $(\lg x)_+$ zugeordnet ist,

$$(\lg x)_+[\varphi] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x \lg x\, \varphi(x),$$

so ist die Ableitung entsprechend oben angegebener Definition gegeben durch

$$(\lg x)_+'[\varphi] = -(\lg x)_+[\varphi'] = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x \lg x\, \varphi'(x).$$

Partielle Integration liefert, wegen $\varphi(\infty) = 0$,

$$(\lg x)_+'[\varphi] = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x\, \varphi(x)/x + \lg \varepsilon \cdot \varphi(0) \Big\}$$

oder mit der Abkürzung

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x\, \varphi/x + \lg \varepsilon \cdot \varphi(0) \Big\} = \mathrm{Pf}\,(1/x)_+[\varphi]$$

die Beziehung

$$(\lg x)_+'[\varphi] = \mathrm{Pf}\,(1/x)_+[\varphi].$$

Der Funktion $(1/x)_+$ ist also die Distribution $\mathrm{Pf}\,(1/x)_+$ zugeordnet, und Distributionen dieser Art nennt man Pseudofunktionen. Eine analoge Formel erhält man für die Pseudofunktion

$$\mathrm{Pf}\,(1/x)_-[\varphi],$$

wobei allgemein $f_-(x)$ definiert ist durch $f_-(x) = f(x)$ für $x < 0$, $f_-(x) = 0$ für $x > 0$. Wie in Anm. 1, A näher ausgeführt ist, sind dann die Distributionen (Pseudofunktionen), welche den Funktionen $(1/x^n)_\pm$ zugeordnet sind, gegeben durch (n ganz, $n \geq 1$)

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\,(1/x^n)_\pm[\varphi] = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ &\pm \int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} \mathrm{d}x\, \varphi(x)\, x^{-n} \\ &+ \sum_{\mu=0}^{n-2} \sigma_\pm\, \varphi^{(\mu)}(0)\, \varepsilon^{\mu+1-n}/\mu!\,(\mu+1-n) \qquad (1.1)\\ &\pm \varphi^{(n-1)}(0) \lg \varepsilon/(n-1)! \Big\}\end{aligned}$$

mit $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = (-1)^{n+\mu}$. Für die Ableitung von $\mathrm{Pf}\,(x^{-n})_\pm$ findet man

$$[\mathrm{Pf}\,(x^{-n})_\pm]' = -n\, \mathrm{Pf}\,(x^{-n-1})_\pm \pm (-1)^n\, \delta_x^{(n)}/n!\,,$$

was unmittelbar anschaulich ist. Das Symbol φ wird im folgenden unterdrückt, sofern dies möglich ist.

Die Pseudofunktionen $\mathrm{Pf}\,(x^{-n})_\pm[\varphi]$ sind identisch mit den bekannten Hadamardschen „endlichen Teilen" der divergenten Integrale

$$\pm \int_{0}^{\pm\infty} \mathrm{d}x\, \varphi(x)\, x^{-n}.$$

Der Term $\sum \ldots \pm \varphi^{(n-1)}(0) \lg \varepsilon/(n-1)!$ in (1.1) stellt gerade den negativen, für $\varepsilon \to 0$ divergenten

Teil dieser Integrale dar, wovon man sich durch Taylor-Entwicklung von φ leicht überzeugt. Ihre wichtigste physikalische Anwendung finden die Pseudofunktionen bei der Lösung von Potential- und Wellengleichungen[2]. Beispielsweise ist die exakte Lösung von $\triangle \Phi = \delta$ gegeben durch[1, 2] $\Phi = -(1/4\pi)\,\mathrm{Pf}\,r^{-1}$, nicht etwa durch

$$\Phi = -(1/4\pi)\,r^{-1}.$$

Wir werden sehen, daß sich $\mathrm{Pf}\,(r^{-n})$ von r^{-n} nur unterscheidet in seinem Verhalten im Punkt $r=0$ und in seiner Umgebung. Die Pseudofunktionen sind, als strenge Lösungen von Potential- und Wellengleichungen, die physikalisch wichtigen Größen.

Wir definieren nun das bestimmte Integral einer Distribution $T[\varphi]$ über einen Bereich B der x-Achse (wir beschränken uns der Einfachheit halber auf eine Dimension) durch

$$(\textstyle\int_{\mathrm{B}} \mathrm{d}x)\, T[\varphi] = \int_{\mathrm{B}} \mathrm{d}x\, T[\varphi] = T[\gamma], \quad (1.2)$$

wo $\gamma = 1$ für x in B, $\gamma = 0$ für x nicht in B ist. Für die linke Seite von (1.2) schreiben wir auch $\int_{\mathrm{B}} \mathrm{d}x\, T$ bzw. für $T = \mathrm{Pf}\,(g)$ auch $\int_{\mathrm{B}} \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(g) = \mathrm{Pf} \int_{\mathrm{B}} \mathrm{d}x\, g$. Insbesondere gilt so

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, T = T[1] \quad (1.3)$$

für alle Distributionen T_x mit endlichem Träger. Allgemeiner gilt (1.3) immer dann, wenn das Integral existiert, also z. B. dann, wenn T_x im Unendlichen mindestens wie $x^{-1-\varepsilon}$ verschwindet. Von besonderer Bedeutung für das Folgende ist das Problem der Koordinatentransformation bei Pseudofunktionen und ihren Integralen. Das hier gefundene Verhalten ist völlig verschieden von demjenigen „regulärer" Distributionen und Funktionen. Ist $T_y[\psi(y)]$ eine beliebige Distribution „in y" und wird y auf x abgebildet durch die eindeutige Transformation $y \to x = \mu^{-1}(y)$, $y = \mu(x)$, wobei $\psi(y)$ übergeht in $\varphi(x) = \psi(\mu(x))$, so geht $T_y[\psi]$ über in eine Distribution $S_x[\varphi(x)]$ definiert durch[4]

$$S_x[\varphi(x)] = T_y[\varphi(\mu^{-1}(y))\,\mathrm{d}\mu^{-1}(y)/\mathrm{d}y], \quad (1.4\,\mathrm{a})$$

d. h. man hat die Beziehung

$$T_{\mu(x)}[\varphi(x)] = T_y[\varphi(\mu^{-1}(y))\,\mathrm{d}\mu^{-1}(y)/\mathrm{d}y]. \quad (1.4\,\mathrm{b})$$

Eine solche Transformation bezeichnen wir als Transformation vom Funktionstyp, denn wie man leicht einsieht, liefert (1.4) gerade das richtige Transformationsverhalten für Distributionen, welche summablen Funktionen zugeordnet sind. In bestimmten Integralen über Distributionen wird man bei Variablentransformationen eine andere Transformation vornehmen, um Divisionsschwierigkeiten, wie sie aus einer Transformation $\mathrm{d}y \to \mathrm{d}x$ gelegentlich folgen, zu vermeiden. Eine Transformation $y \to x = \mu^{-1}(y)$, $y = \mu(x)$, — die den Bereich B_y, $a' \leq y \leq b'$, überführt in den Bereich B_x, $a \leq x \leq b$, wobei $(a \leq b) \longleftrightarrow (a' \leq b')$ vorausgesetzt ist, — in einem Integral $\int_{\mathrm{B}y} \mathrm{d}y\, T_y$ wird erklärt durch

$$\int_{\mathrm{B}y} \mathrm{d}y\, T_y = \int_{\mathrm{B}x} \mathrm{d}x\, G_x, \quad (1.5\,\mathrm{a})$$

wobei G_x aus T_y hervorgeht durch eine Transformation vom Dichtetyp (im Sprachgebrauch der Tensoranalysis):

$$G_x[\varphi(x)] = T_y[\varphi(\mu^{-1}(y))],$$
$$\text{d. h.}\quad G_x = T_{\mu(x)} \cdot \mathrm{d}\mu(x)/\mathrm{d}x. \quad (1.5\,\mathrm{b})$$

Für Integrale über Distributionen vom Typ einer Funktion findet man damit genau das übliche Transformationsgesetz. Pf-Integrale stimmen mit gewöhnlichen Integralen überein, wenn diese konvergieren, in allen anderen Fällen stellen sie eine natürliche Erweiterung des Integralbegriffes dar, mit anderen Worten, Pf-Integrale sind die Integrale der Distributionstheorie, die ja eine Erweiterung der gewöhnlichen Analysis bildet.

Wir wenden nun diesen Formalismus auf die Pseudofunktionen und die durch sie dargestellten singulären Potentiale an. Dabei beschränken wir uns zunächst auf Dilatationstransformationen. Entsprechend der Definition (1.4a) hat man zunächst mit $x = \mu^{-1}(y) = \alpha \cdot y$ (α = const, >0) wegen (1.1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\,(\alpha x^{-1})_+[\varphi] &= \mathrm{Pf}\,(y^{-1})_+[\varphi(\alpha y)\,\alpha] \\ &= \alpha \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}y\, \varphi(\alpha y)\, y^{-1} + \lg\varepsilon\cdot\varphi(0)\Big\} \\ &= \alpha \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\int_{\varepsilon\alpha}^{\infty} \mathrm{d}x\, \varphi(x)\, x^{-1} + \lg(\varepsilon\alpha)\cdot\varphi(0)\Big\} - \alpha\lg\alpha\cdot\varphi(0) \\ &= \alpha\,\mathrm{Pf}\,(x^{-1})_+[\varphi] - \alpha\lg\alpha\cdot\varphi(0),\end{aligned}$$

d. h. es gilt

$$\mathrm{Pf}\,(\alpha/x)_+[\varphi] = \alpha\,\mathrm{Pf}\,(1/x)_+[\varphi] - \alpha\lg\alpha\cdot\delta_x[\varphi]. \quad (1.6)$$

Allgemein findet man (n ganz)

$$\mathrm{Pf}\,(\alpha/x^n)_\pm[\varphi] = \alpha\,\mathrm{Pf}\,(1/x^n)_\pm[\varphi] \pm (-1)^n\,\alpha\lg\alpha\cdot\delta_x^{(n-1)}[\varphi]/n!. \quad (1.7)$$

Die hier auftretenden logarithmischen Zusatzterme sind charakteristisch für die Pseudofunktionen. Im Falle nicht ganzzahliger n, $n = m$, findet

[4] M. Cugiani u. S. Albertoni, Nuovo Cim. 8, 874 [1951]; **10**, 157 [1953].

man unter Verwendung der entsprechenden Formeln von Anm. 1, A (Gl. (2.18)),

$$\mathrm{Pf}\,(\alpha/x^m)_\pm = \alpha\,\mathrm{Pf}\,(1/x^m)_\pm,$$

also ein Transformationsverhalten wie bei gewöhnlichen Funktionen. $\mathrm{Pf}\,(x^{-n})_\pm$ ist ersichtlich keine homogene Größe, sondern hängt von der Einheit des Koordinatensystems (α) ab, die aus Dimensionsgründen ausgezeichnet ist. Wir wenden uns nun Integralen von Pseudofunktionen zu, welche die divergenten Integrale über singuläre Potentiale bzw. deren Fourier-Transformierte ersetzen.

Aus (1.1)—(1.3) folgt zunächst $\mathrm{Pf}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,(x^{-n})_\pm = 0$ für $n \geq 2$, und daraus durch Subtraktion des konvergenten Integrals $\int\limits_a^\infty \mathrm{d}x/x^n$

$$\mathrm{Pf}\int\limits_0^a \mathrm{d}x\,(x^{-n}) = -\,a^{-(n-1)}/(n-1)\,,\quad n \geq 2\,, \tag{1.8}$$

während sich für $n = 1$, $0 < a < \infty$, die Beziehung

$$\mathrm{Pf}\int\limits_0^a \mathrm{d}x/x = \lg a \tag{1.9}$$

ergibt. Das Integral $\mathrm{Pf}\int\limits_1^\infty \mathrm{d}x/x$ muß separat behandelt werden mit dem Ergebnis $\mathrm{Pf}\int\limits_1^\infty \mathrm{d}x/x = 0$. Integration von (1.6), (1.7) gemäß (1.2), bzw. eine Variablentransformation in (1.8), (1.9) nach (1.5), liefert dann

$$\mathrm{Pf}\int\limits_0^a \mathrm{d}x\,(\alpha/x^n)_+ \equiv \int\limits_0^a \mathrm{d}x\,\mathrm{Pf}\,(\alpha/x^n)_+ = \begin{cases} \alpha\lg(a/\alpha), & n = 1,\ 0 < a < \infty \\ -\,\alpha\,a^{-(n-1)}/(n-1), & (n \geq 2) \end{cases} \tag{1.10a}$$

und

$$\mathrm{Pf}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,(\alpha/x^n)_\pm \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{Pf}\,(\alpha/x^n)_\pm = \mp\,\alpha\lg\alpha\cdot\delta_{n1}. \tag{1.10b}$$

Die Pseudofunktionen $\mathrm{Pf}\,[\exp(i\,k\,x)/x^n]_\pm\,[\varphi]$ gehen aus (1.1) hervor durch die Substitution $\varphi^{(\mu)}(x) \to \mathrm{d}^\mu\,[\varphi(x)\exp(ikx)]/\mathrm{d}x^\mu$. Die Ausrechnung liefert

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\,[\exp(i\,k\,x)/x^n]_\pm\,[\varphi] &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\pm\int\limits_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} \mathrm{d}x\,[\varphi(x)\exp(i\,k\,x)]/x^n \\ &+ \sum_{\mu=0}^{n-2} \sigma_\pm \frac{\varepsilon^{\mu+1-n}}{\mu!\,(\mu+1-n)} \sum_{\varrho=0}^{\mu} \binom{\mu}{\varrho} (i\,k)^{\mu-\varrho}\,\varphi^{(\varrho)}(0) \\ &\pm \frac{\lg\varepsilon}{(n-1)!} \sum_{\varrho=0}^{n-1} \binom{n-1}{\varrho} (i\,k)^{n-1-\varrho}\,\varphi^{(\varrho)}(0)\Big\}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

wobei $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = (-1)^{n+\mu}$ ist. Unter der Voraussetzung $k > 0$ führt die Transformation $y \to x = k\,y$ die Distribution $T_y = \mathrm{Pf}\,[\exp(i\,k\,y)/y^n]_\pm$ über in (nach (1.4))

$$S_x^\pm\,[\varphi] = k^n\,\mathrm{Pf}\,[\exp(i\,x)/x^n]_\pm\,[\varphi] \mp [k^n \lg k/(n-1)!] \sum_{\varrho=0}^{n-1} \tbinom{n-1}{\varrho}\, i^{n-1-\varrho}\,(-1)^\varrho\,\delta^{(\varrho)}\,[\varphi]\,. \tag{1.12}$$

Der Beweis von (1.12) verläuft analog zum Beweis von (1.6). Um das bestimmte Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x$ von $\mathrm{Pf}\,[\exp(i\,k\,x)/x^n]_\pm$ zu finden, hat man die Transformation (1.5b) mit $x = k\,y$ auszuführen, was

$$G_x^\pm\,[\varphi] = k^{-1}\,S_x^\pm\,[\varphi]$$

liefert. Dann folgt mit (1.5a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,[\exp(i\,k\,x)/x^n]_\pm &= k^{n-1}\,\mathrm{Pf}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,[\exp(i\,k\,x)/x^n]_\pm \\ &\mp k^{n-1}\lg|k|\cdot i^{n-1}/(n-1)!\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Trennung in Real- bzw. Imaginärteil liefert die entsprechenden Relationen für $\mathrm{Pf}\,[\cos(k\,x)/x^n]_\pm$ bzw. für $\mathrm{Pf}\,[\sin(k\,x)/x^n]_\pm$. Mittels der Definition

$$T_{\mu(-x)}\,[\varphi(x)] = T_y\,[\varphi(-\mu^{-1}(y))\,\mathrm{d}\mu^{-1}(y)/\mathrm{d}y], \tag{1.14}$$

aus der $T_\pm(-x)\,[\varphi] = -T_\pm(x)\,[\varphi]$ folgt, zeigt man dann, daß (1.13) auch für $k < 0$ gilt. Zur expliziten Darstellung der Pf-Integrale leiten wir folgende Rekursionsformel ab:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\,(\sin x/x^n)\,[1] &= (n-1)^{-1}\,\mathrm{Pf}\,(\cos x/x^{n-1})_\pm\,[1] \\ &\mp (-1)^{n/2}\,\eta_n/(n-1)!\,(n-1), \end{aligned} \tag{1.15}$$

wobei $n > 1$, $\eta_n = 1$ (n gerade), $\eta_n = 0$ (n ungerade) ist. Macht man in (1.11) die Substitution $k = 1$, $\varphi(x) = 1$, $\varphi^{(\mu)}(0) = \delta_{\mu 0}$ und nimmt von dem entstehenden Ausdruck den Imaginärteil, so ergibt sich [$\tau_\mu = 0$ (μ gerade), $\tau_\mu = 1$ (μ ungerade)]

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\,(\sin x/x^n)_\pm\,[1] = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{&\pm\int\limits_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} \mathrm{d}x\,\frac{\sin x}{x^n} + \sum_{\mu=0}^{n-2} \sigma_\pm \frac{\varepsilon^{\mu+1-n}}{\mu!\,(\mu+1-n)}\,(-1)^{(\mu-1)/2}\,\tau_\mu \\ &\pm \frac{\lg\varepsilon}{(n-1)!}\,(-1)^{(n-2)/2}\,\eta_n\Big\}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Partielle Integration der rechten Seite liefert neben $\pm\,(n-1)^{-1}\int\limits_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} \mathrm{d}x\,\cos x/x^{n-1}$ noch einen Randbeitrag in ε. Durch Zusammenfassung dieses Beitrags mit der Summe in (1.16) und Vergleich des entstehenden Ausdrucks mit dem Integral

$$\mathrm{Pf}\,(\cos x/x^{n-1})_\pm\,[1],$$

das aus dem Realteil von (1.11) mit

$$k \to 1,\ n \to n-1,\ \varphi^{(\mu)} \to \delta_{\mu 0}$$

folgt, erhält man dann gerade die Relation (1.15). Für $n=1$ hat man aus (1.16)

$$\mathrm{Pf}\,(\sin x/x)_\pm\,[1] = \int_0^\infty \mathrm{d}x \sin x/x = \pi/2.$$

Kennt man nun die Integrale $\mathrm{Pf}\,(\sin x/x^n)_\pm\,[1]$ für alle n, so sind damit auch die Integrale

$$\mathrm{Pf}\,(\cos x/x^n)_\pm\,[1]$$

bekannt. Aus Symmetriegründen genügt es,

$$\mathrm{Pf}\,(\sin x/x^n)_+\,[1]$$

zu berechnen, wozu nach (1.16) die Kenntnis von $\int_\varepsilon^\infty \mathrm{d}x \sin x/x^n$ erforderlich ist. Die Auswertung dieses Integrals liefert nach längerer Rechnung, wegen $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Ci}\,(\varepsilon) = \lg\gamma + \lim_{\varepsilon\to 0} \lg\varepsilon$ [$\mathrm{Ci}\,(x)$ = Integralcosinus, $\lg\gamma = C$ = Eulersche Konstante] nach Einsetzen in (1.16) das Ergebnis[5]

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\sin x/x^n)_\pm = \mp [(-1)^{n/2}/\Gamma(n)]\,\psi(n)\,\eta_n + \pi(-1)^{(n-1)/2}\,\eta_n'/2\,\Gamma(n). \quad (1.17)$$

Dabei ist $\eta_n = 1$ (n gerade), $\eta_n = 0$ (n ungerade), $\eta_n' = \eta_{n+1}$. Aus (1.17) folgt mit (1.15)

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\cos x/x^n)_\pm = \pm [(-1)^{(n-1)/2}/\Gamma(n)]\,\psi(n)\,\eta_n' + \pi(-1)^{n/2}\,\eta_n/\Gamma(n), \quad (1.18\,\mathrm{a})$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\exp(i\,x)/x^n)_\pm = \big(\pi\, i^n/2\,\Gamma(n)\big)\,[1 \mp 2\,i\,\psi(n)/\pi]. \quad (1.18\,\mathrm{b})$$

Dabei ist $\psi(z)$ die bekannte Funktion $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$, d. h. $\psi(n) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu^{-1} - \lg\gamma$. Damit sind auch die Integrale (1.13) bestimmt.

Von größerer Wichtigkeit für die Anwendungen sind die Pseudofunktionen

$$\mathrm{Pf}\,(\alpha^m \exp(i\,k\,x)/x^n)_\pm$$

und ihre Integrale, wobei α eine komplexe Konstante ist, die jedoch nicht einfach vor das Pf-Symbol herausgezogen werden darf! Zunächst gilt

$$\mathrm{Pf}\,(\alpha^m \exp(i\,k\,x)/x^n)_\pm\,[\varphi] = \mathrm{Pf}\,(\alpha^m/x^n)_\pm\,[\varphi \exp(i\,k\,x)]. \quad (1.19)$$

Daß hier $\exp(i\,k\,x)$ mit φ zusammengezogen werden kann, läßt sich durch Transformationen, analog zu den in (1.12) mit (1.4 b) ausgeführten, streng beweisen. Mit der Substitution $\varphi \to \varphi \exp(i\,k\,x)$ in (1.7) erhält man aus (1.19) die Beziehung

$$\mathrm{Pf}\,(\alpha^m \exp(i\,k\,x)/x^n)_\pm\,[\varphi] = \alpha^m\, \mathrm{Pf}\,(\exp(i\,k\,x)/x^n)_\pm\,[\varphi] \mp [(-1)^n/n!]\,\alpha^m \lg|\alpha^m| \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} (i\,k)^{n-1-\mu} (-1)^\mu\, \delta_x^{(\mu)}[\varphi], \quad (1.20)$$

woraus mit $\varphi = 1$ für alle ganzen $n \geq 1$ folgt

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\alpha^m \exp(i\,k\,x)/x^n)_\pm = \alpha^m \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\exp(i\,k\,x)/x^n)_\pm \pm (-i\,k)^{n-1}\,\alpha^m \lg|\alpha^m|/n!. \quad (1.21)$$

Substitution von (1.18 b) in die rechte Seite von (1.13) und Einführung des resultierenden Ausdrucks in die rechte Seite von (1.21) liefert (unter Beachtung von $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, T_+ = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, T$, $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, T_- = \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x\, T$, $\varepsilon(z) = z/|z|$, $n \geq 1$, $\psi(n) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu^{-1} - \lg\gamma$) die Relationen

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\alpha^m \exp(i\,k\,x)/x^n)_\pm = \mp [i\,\alpha^m\, k^{n-1} (-1)^{n/2}/\Gamma(n)] \cdot [\psi(n) - \lg|k\,\alpha^{m/n}| + i\,\pi\,\varepsilon(k)/2], \quad (1.22)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\alpha^m \cos(k\,x)/x^n)_\pm = \pm [\alpha^m\, k^{n-1} (-1)^{(n-1)/2}/\Gamma(n)] \quad (1.23\,\mathrm{a})$$
$$\cdot [(\psi(n) - \lg|k\,\alpha^{m/n}|)\,\eta_n' \pm i\,\pi\,\varepsilon(k)\,\eta_n/2],$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\alpha^m \sin(k\,x)/x^n)_\pm = \mp [\alpha^m\, k^{n-1} (-1)^{n/2}/\Gamma(n)] \quad (1.23\,\mathrm{b})$$
$$\cdot [(\psi(n) - \lg|k\,\alpha^{m/n}|)\,\eta_n \pm i\,\pi\,\varepsilon(k)\,\eta_n'/2]$$

und daraus, wegen $\mathrm{Pf}\,(g) = \mathrm{Pf}\,(g_+) + \mathrm{Pf}\,(g_-)$,

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\alpha^m \exp(i\,k\,x)/x^n) = \alpha^m\, \pi\, i^n\, k^{n-1}\, \varepsilon(k)/\Gamma(n) \quad (1.24\,\mathrm{a})$$

mit der Fourier-Umkehrung (1.24 b)

$$\mathrm{Pf}\,(x^{-n}) = [2\,i^n\,\Gamma(n)]^{-1}\, \mathrm{Pf} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \varepsilon(k)\, k^{n-1} \exp(i\,k\,x).$$

[5] Gl. (1.17) wurde unabhängig von A. W. Jansen[12] gefunden.

Ferner hat man mit

$$\mathrm{Pf}\big(\varepsilon(x)\, g(x)\big) = \mathrm{Pf}(g_+) - \mathrm{Pf}(g_-)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}\,(\varepsilon(x)\, \alpha^m \exp(i k x)/x^n) \tag{1.25}$$

$$= 2\, i\, \alpha^m\, k^{n-1} (-1)^{n/2} [\psi(n) - \lg |k\, \alpha^{m/n}|]/\Gamma(n)\,.$$

Schließlich geben wir noch an ($n \geq 1$)

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{Pf}(\alpha^m\, e^{-\mu x}\, e^{ikx}/x^n) = \alpha^m (i k - \mu)^{n-1} [\psi(n)$$

$$- (1/2) \lg |(k^2 + \mu^2)\, \alpha^{2m/n}| + i\, \mathrm{HW} \operatorname{arctg}(k/\mu)]/\Gamma(n) \tag{1.26}$$

($\mu \geq 0$, reell, HW = Hauptwert). Dieses Integral kann z. B. aus (1.22) durch Fortsetzung in die positiv imaginäre k-Halbebene[6] ($k \to k + i\mu$) erhalten werden unter Benützung von

$$\varepsilon(k + i\mu) = (2/\pi)\, \mathrm{HW} \operatorname{arctg}(k/\mu).$$

Wir haben uns hier auf reine Dilatationstransformationen beschränkt und gefunden, daß die Pseudofunktionen bei solchen Transformationen nicht invariant sind, solange ihre Träger nicht symmetrisch bezüglich des Nullpunktes des Koordinatensystems sind. Das ist von Bedeutung für die $S_\pm$- und $D_\pm$-,,Funktionen" der Feldtheorie, da mit diesen bisher immer so gerechnet wurde wie mit gewöhnlichen Funktionen. Es zeigt sich so, daß bei solchen Größen die Transformationsregeln der gewöhnlichen Analysis nicht mehr gelten. Dies ist um so mehr der Fall bei nichtlinearen und damit nicht eindeutig umkehrbaren Transformationen. So findet man z. B.[6] — mittels eines ,,Fortsetzungsprozesses" ähnlich zu dem in[3, 4] benützten —, daß bei der Transformation $y \to x = y^{1/2}$ die Pseudofunktion $\mathrm{Pf}\,(y^{-1})_+$ übergeht in $\mathrm{Pf}\,(x^{-2})_+ + c\,\delta_x$, wobei c eine willkürliche, endliche, komplexe Zahl ist, während man $\mathrm{Pf}\,(x^{-2})_+ \to \mathrm{Pf}\,(y^{-1})_+$ findet für $x \to y = x^2$. Da die invarianten Fortpflanzungsfunktionen der Quantenfeldtheorie bzw. ihre Fourier-Darstellungen gerade Pseudofunktionen bzw. Integrale von solchen sind[2], zeigen obige Überlegungen, daß bei Rechnungen mit solchen Größen äußerste Vorsicht nötig ist. Die Produktbildung von Pseudofunktionen wurde an anderer Stelle erklärt[3].

Die bisherigen Überlegungen bezogen sich auf Pseudofunktionen einer Variablen. Die Erweiterung auf drei und vier Dimensionen ist möglich. Das wird im zweiten Teil gezeigt. Es ergibt sich, daß ($n \geq 1$)

$$\mathrm{Pf} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x\, (x_\nu{}^2 - m^2)^{-n}\, \varphi(x)$$

$$= \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{L.\,G.}} \int_{|x_\nu{}^2 - m^2| \geq \varepsilon} \mathrm{d}^4 x\, (x_\nu{}^2 - m^2)^{-n}\, \varphi(x) \tag{1.27}$$

ist, wobei unter L. G. ein ,,limes generalis" zu verstehen ist, der sich im eindimensionalen Fall auf den in (1.1) benützten Grenzprozeß reduziert und der es auch gestattet, obige Überlegungen mit funktionentheoretischen Methoden durchzuführen[6].

II. Reihenentwicklungen in der Quantenfeldtheorie

Im gegenwärtigen Stadium der Quantentheorie sind iterative Lösungen der Feldgleichungen unumgänglich, und die Frage nach der Existenz und Auswertung der Reihenentwicklungen nach einem Kopplungsparameter gehört zu den zentralen Problemen der Theorie. Es konnte wahrscheinlich gemacht werden[7], daß die iterativen Lösungen der Integralgleichungen für die Wechselwirkung von Teilchen einen sehr kleinen, wenn nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzen. Die Entwicklung nach dem Kopplungsparameter führt insbesondere immer dann zu Divergenzen, wenn die Integralgleichungen die Entstehung gebundener Teilchen beschreiben. Die Fredholmsche Theorie ist hier i. allg. wegen der extremen Singularität der Kerne nicht anwendbar. Bei der Bethe-Salpeter-Gleichung hängt das Eigenwertspektrum stark vom Verhalten bei kleinen Eigenabständen ab, und Reihenentwicklungen der Wellenfunktionen nach Potenzen der Totalenergie des Systems (für große Bindungsenergien) divergieren in der Umgebung des Lichtkegels gliedweise. Zu diesen Problemen gehören auch die Infrarotdivergenzen, Streuung an singulären Potenzen usw.

Auf den Zusammenhang der Pseudofunktionsintegrale mit dem Renormierungsproblem sei kurz hingewiesen. Die in den Darstellungen der Pseudofunktionen abseparierten ,,unendlichen Teile" der entsprechenden klassischen divergenten Integrale [vgl. die Bemerkung im Anschluß an Gl. (1.1)] entsprechen genau den divergenten Renormierungstermen der Feldtheorie. Die Anwendung der

[6] W. Güttinger, im Erscheinen.

[7] E. Freese, Z. Naturforschg. **8a**, 776 [1953]; H. S. Green, Phys. Rev. **95**, 548 [1954]; I. S. Goldstein, Phys. Rev. **91**, 1561 [1953]; S. F. Edwards, Phys. Rev. **90**, 284 [1953].

Pseudofunktionen in der Feldtheorie macht die divergenten Selbstenergieintegrale durchaus endlich. Wie an anderer Stelle gezeigt wurde[3], erhält man damit jedoch keine eindeutig bestimmten Werte für solche Größen. Denn man kann streng beweisen, daß die eingehenden Produkte der „uneigentlichen" Operatoren, wie $S_F \cdot D_F$, in mathematisch notwendiger Weise willkürliche Parameter enthalten. Daraus resultiert z. B. $\overline{\psi}\, \delta\, m\, \psi = \overline{\psi}\, (m_0 + \lambda)\, \psi$ mit willkürlichem λ für die Elektronenselbstenergie.

Um die Behandlung oben genannter Fragen im zweiten Teil vorzubereiten, soll im folgenden die Pf-Theorie auf einige spezielle Probleme angewandt werden, welche hinsichtlich ihrer singulären Struktur als charakteristische Modelle für die angeschnittenen Probleme anzusehen sind.

Wir betrachten zunächst die Laurent-Entwicklung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n/x^n$ einer gegebenen Funktion $f(x)$. Die Reihe $\sum c_n/x^n$ konvergiert für alle $|x| > 1/\varrho$, $\varrho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |c_n/c_{n+1}|$, also außerhalb eines den Punkt $x = 0$ enthaltenden und zu diesem symmetrischen Divergenzbereiches. Dabei sei auch $\varrho = 0$ zugelassen, d. h. die Reihe darf auch überall divergieren mit Ausnahme des Punktes $x = \infty$. Für $|x| > 1/\varrho$ gilt $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n/x^n$. Wir nehmen ferner an, daß die Fourier-Transformierte $\bar{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) \exp(i k x)$ von $f(x)$ existiert, und zwar im Sinne der Distributionstheorie. Wir lassen also auch hochsinguläre Funktionen $f(x)$ zu, unter etwaiger Hinzunahme des Pf-Begriffs. In den feldtheoretischen Formalismen sind nun divergente Reihen wie $\sum c_n/x^n$ bzw. Reihen der Fourier-Transformierten von c_n/x^n das primär Gegebene, diese Fourier-Transformierten sind jedoch im Sinne der klassischen Analysis divergent. Wie in § I ausgeführt wurde, haben solche divergenten Größen als Pseudofunktionen bzw. Integrale von solchen in der Distributionsanalysis volle Existenzberechtigung. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß man die im klassischen Sinne divergenten Reihen mittels des Pf-Begriffs zur Konvergenz bringen kann. Diese Vermutung wird im folgenden bestätigt. Im Sinne der Distributionstheorie haben wir c_n/x^n durch

$$\mathrm{Pf}\,(c_n/x^n)$$

zu ersetzen und bilden damit die Fourier-Transformierte der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{Pf}\,(c_n/x^n)$:

$$\bar{g}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Pf} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, c_n \exp(i k x)/x^n. \qquad (2.1)$$

Die hier auftretenden Integrale existieren nach § I, und mit (1.24a) ergibt sich

$$\bar{g}(k) = 2\pi c_0\, \delta(k) + i\pi\, \varepsilon(k) \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (i k)^n/n!. \qquad (2.2)$$

Der Konvergenzradius der Reihe (2.2) ist gegeben durch

$R = \lim\limits_{n\to\infty} |c_{n+1}(n+1)/c_{n+2}|$, also wegen $\varrho = \lim\limits_{n\to 0} |c_n/c_{n+1}|$ durch

$$R = \varrho \cdot \lim_{n\to\infty} n. \qquad (2.3)$$

Die Fourier-Transformierte (2.1) der $\sum c_n/x^n$ ist also immer dann beständig konvergent, wenn die Reihe $\sum c_n/x^n$ einen endlichen — aber beliebig großen — Divergenzbereich besitzt. Aber auch im Falle, daß $\sum c_n/x^n$ nur im Punkt $x = \infty$ konvergiert ($\varrho = 0$) und für alle endlichen x divergiert, kann die Reihe der Fourier-Transformierten (2.2) noch konvergieren, wie man für den Fall

$$c_n/c_{n+1} = O(1/n^{\alpha}),\ \alpha \leq 1$$

leicht einsieht (vgl. z. B. die überall divergente Reihe $\sum\limits_{0}^{\infty} n!/x^n$). Ähnliche Ergebnisse findet man bei Reihen der Form $\sum\limits_{0}^{\infty} (c_n/x^n)_{\pm}$ und

$$\sum (c_n \exp(-\alpha_n r)/r^n)_{r \geq 0}.$$

Hier tritt aber nach § I die Besonderheit auf, daß bei der Bildung von $\bar{g}(k)$ mit (1.21), (1.22) die Entwicklungsparameter c_n nicht vor das Pf-Symbol gezogen werden dürfen (vgl. unten). Auf die physikalisch bedeutsame Frage, unter welchen Bedingungen die a priori gegebene Fourier-Transformierte von $\sum c_n \exp(-\alpha_n r)/r^n$ auch die Fourier-Transformierte von $f(r)$ wirklich darstellt, gehen wir im zweiten Teil näher ein; sie ist positiv zu beantworten bei gleichmäßiger Konvergenz der transformierten Reihe[8].

Wir behandeln mit dieser Methode zunächst die Infrarotdivergenzen. Dieses Problem läßt sich auf eine Untersuchung der singulären Struktur des Schwingerschen Massenoperators M zurückführen, der im Rahmen einer modifizierten Dirac-Glei-

[8] Ein Beweis wurde von H. L. Jordan gegeben.

chung $(\gamma\,\pi+M)\,\psi=0$ die Wechselwirkung eines Elektrons mit dem Strahlungsfeld beschreibt[9]. In erster Näherung ist M gegeben durch

$$M\,(x,x') = m\,\delta\,(x-x') + i\,e^2\,\gamma_\mu\,G_+\,\gamma_\mu\,D_+$$

(Bezeichnung nach Schwinger; betr. der Definition des Produkts $G_+\,D_+$ vgl.[3]), wobei G_+, D_+ die Greenschen Funktionen (Distributionen!) des Elektronen- und Maxwell-Feldes sind. Nach Karplus, Klein und Schwinger[9] läßt sich M im Falle eines gleichförmigen Feldes in der Operatorform ($\pi_\mu=-i\,\partial_\mu-e A$)

$$M = m - \frac{i\,e^2}{2\,(2\,\pi)^4}\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}^4k\,e^{-i\,\tau\,k^2}\,e^{i\,k\,x}\,\gamma_\mu \cdot\{(m-\gamma\,\pi),\,e^{-i\,s\,(m^2-(\gamma\,\pi)^2)}\}\,\gamma_\mu\,e^{-i\,k\,x}$$

$$= m + (i\,e^2/2\,(2\,\pi)^4)\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}^4k\int_0^1 \mathrm{d}u\,u^{-2} \cdot\int_0^\infty s\,\mathrm{d}s\,\exp\big(-i\,s\,(m^2+k^2/u)\big)\cdot Q \qquad (2.4)$$

darstellen, mit einem Operator

$$Q = Q\,(\gamma, m, k, \pi, s, u).$$

Die s- und τ-Integrale folgen aus der Darstellung von Operatoren wie $\mathrm{Pf}\,A^{-1}$ durch

$$i\int_0^\infty \mathrm{d}q\,\exp\,(-i\,q\,A)$$

im Sinne eines Abelschen Grenzwertes. Statt dessen kann man auch die Darstellung (1.24 b)

$$\mathrm{Pf}\,A^{-1} = (i/\pi)\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}q\,\varepsilon\,(q)\,\exp\,(i\,q\,A)$$

benützen, wodurch Limitierungsprozesse überflüssig werden. Die Variable u ist mit der Eigenzeitvariablen τ verknüpft durch $\tau=s\,[1-u]/u$. Die Ausführung der k-Integration macht es notwendig, die auftretenden Exponentiale nach Potenzen von e zu entwickeln, und die nachfolgende s-Integration erzeugt dann immer höhere Potenzen von u^{-1}, welche bei der u-Integration zu immer höheren Divergenzen bei $u=0$ führen. $u\sim 0$ bedeutet aber $\tau\gg 1$ und daher Photonenimpulse $p\sim 0$. Wir haben also Infrarotdivergenzen vorliegen, die in diesem Fall nicht durch andere Effekte kompensiert werden können und die offensichtlich durch die unvermeidbare Fortsetzung der Reihenentwicklungen über ihren Konvergenzbereich hinaus induziert werden.

Die Struktur des Kernes des Massenoperators, soweit durch sie bei der Reihenentwicklung die Infrarotdivergenzen erzeugt werden, läßt sich charakterisieren durch einen Integralausdruck der Form ($\alpha\sim e A$)

$$\alpha\cdot\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}s\,\varepsilon\,(s)\int_0^1 \mathrm{d}x\,\exp\,[i\,s\,(\alpha+m^2x)],$$

wobei die Größe $\alpha+m^2x$ im wesentlichen durch die Integraldarstellung von $G_+\sim\mathrm{Pf}\,(\gamma\,\pi+m)^{-1}$ erzeugt wurde. Die durch den Operatorcharakter bedingte Reihenentwicklung basiert dann auf der Entwicklung von[9a] $\alpha\,(\alpha+m^2x)^{-1}$ nach Potenzen von α und nachfolgender Integration über x. Durch diese Integration gehen Divergenzen in den Formalismus ein. Um dieses Problem mit dem Pf-Kalkül zu behandeln, genügt es, die Funktion $f\,(x)=\beta\,(\beta+x)^{-1}$ mit der Reihenentwicklung

$$g\,(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-\beta)^{n+1}/x^{n+1},$$

welche für $|x|>|\beta|$ die Funktion $f\,(x)$ liefert, zu betrachten. Die Integration von $f\,(x)$ von 0 bis a liefert $\beta\,\lg\,[(a+\beta)/\beta]$. Die Integration der Reihe $g\,(x)$ ist, den obigen Ausführungen entsprechend, als Integral über die Pseudofunktionen $\mathrm{Pf}\,(\beta^m/x^m)_+$ auszuführen. Man hat dann mit den Formeln (1.10):

$$\mathrm{Pf}\int_0^a g\,\mathrm{d}x \equiv \int_0^a \mathrm{d}x\,\mathrm{Pf}\,(g) = \mathrm{Pf}\int_0^a \mathrm{d}x\,(\beta/x) + \sum_{n=1}^\infty(-1)^n\,\mathrm{Pf}\int_0^a \mathrm{d}x\,(\beta^{n+1}/x^{n+1}) = \beta\,\lg\,[(a+\beta)/\beta] \qquad (2.5)$$

in Übereinstimmung mit dem Integral über $f\,(x)$. Es ist dabei nach § I zu beachten, daß der Entwicklungsparameter β im ersten Term von (2.5) nicht vor das Pf-Symbol gezogen werden darf. Geht man dagegen von $f^*\,(x)=(\beta+x)^{-1}$ aus mit $\int_0^a \mathrm{d}x\,f^*\,(x)=\lg\,[(a+\beta)/\beta]$, so ergibt die Pf-Integration der zugeordneten Reihe $g^*(x)=\sum_{n=0}^\infty(-\beta)^n/x^{n+1}$:

$$\int_0^a \mathrm{d}x\,g^*\,(x) = \mathrm{Pf}\int_0^a \mathrm{d}x/x + \lg\,[(a+\beta)/\beta], \qquad (2.6)$$

[9] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. **37**, 452 [1951]; R. Karplus u. A. Klein, Phys. Rev. **85**, 972; **86**, 288; **87**, 248 [1952]; R. G. Newton, Phys. Rev. **94**, 1773 [1954].

[9a] In mathematisch strenger Weise hat man $\alpha\,(\alpha+m^2x)^{-1}$ durch $\mathrm{Pf}\,[\alpha\,(\alpha+m^2x)^{-1}]$ zu ersetzen, (analog $\beta\,(\beta+x)^{-1}$ durch $\mathrm{Pf}\,[\beta\,(\beta+x)^{-1}]$), in Übereinstimmung mit (1.24). Es ist $\mathrm{Pf}\,(z^{-1})=\mathrm{p.\,v.}\,(z^{-1})$, p. v. bedeutet den Hauptwert. Damit kann die Anwendung der Pf-Operation in den entsprechenden Reihenentwicklungen streng begründet werden.

was bei Anwendung von (1.9) nicht mit $\int_0^a \mathrm{d}x\, f^*$ übereinstimmt.

Die Ursache für diese Diskrepanz ist in folgendem zu suchen: Ein Ausdruck wie $f^* = (x+\beta)^{-1}$, wo x eine dimensionierte physikalische Größe ist, zeichnet physikalisch offensichtlich durch die Singularität von $(x+\beta)^{-1}$ eine natürliche Einheit $|\beta|$ aus. Beim Übergang zur Reihenentwicklung nach Potenzen von β und Integration wird implizite ein Wechsel des Bezugssystems vorgenommen, da die Singularität $x = -\beta$ jetzt in den Nullpunkt gerückt ist. Bei der Integration von Pseudofunktionen drückt sich dieser Wechsel des Bezugssystems nur in den Integralen (1.10) $\mathrm{Pf}\int_0^a \mathrm{d}x\,(\alpha/x)$ aus, wenn α und x verschiedene Dimensionen haben. Das ist physikalisch verständlich, denn in $\lg(a/\alpha)$ können nur gleichdimensionierte Größen a, α als Argument vorkommen. Man hat somit nur die Alternative, entweder die Größe f^* dimensionsfrei zu machen, was dem Übergang $f^* \to f = \beta f^*$ entspricht, wobei in die Reihe $g(x)$ nur dimensionsfreie Größen eingehen und die Einheit $|\beta|$ auch in das neue Bezugssystem eingeführt wird, oder aber der in f^* ausgezeichneten, Einheit $|\beta|$ muß in der Reihenentwicklung nach Potenzen von β dadurch Rechnung getragen werden, daß man die Einheit explizite in das neue, durch die Singularität von x^{-n} in $x=0$ charakterisierte Bezugssystem einführt gemäß $\mathrm{Pf}\int_0^a \mathrm{d}x/x \to \lg(a/\beta)$. Damit stimmt dann auch $\int_0^a \mathrm{d}x\, g^*$ mit $\int_0^a \mathrm{d}x\, f^*$ überein. Diese Übertragung der Einheit ist physikalisch notwendig und völlig eindeutig vorgeschrieben. Im Fall des Massenoperators ist β im wesentlichen durch das Verhältnis e/m^2 d. h. durch die Singularitäten in G_+ bestimmt, und man wird so in natürlicher Weise auf die durch die Atomstruktur bestimmte, untere Grenze der Frequenz virtueller Quanten geführt, wie sie sich nach Karplus, Klein und Schwinger[9] durch die Relation $(\lg z)_{z=0} \to \lg(m/k_0)$ ausdrückt. Auf dieses Problem der Mittransformation des Entwicklungsparameters bei Reihenentwicklungen und Variablentransformationen und auf die Bedeutung der dem physikalischen System durch Singularitäten und Nullstellen seiner Operatoren eingeprägten Einheiten kommen wir im zweiten Teil zurück.

Die Anwendung des Pf-Begriffs auf Probleme von gebundenen Zuständen und auf die zugehörigen singulären Integralgleichungen verdient besonderes Interesse, da im Falle der Existenz von gebundenen Zuständen die Glieder der entsprechenden Fredholmschen Reihenentwicklungen divergieren. Eine Integralgleichung vom Typ (Bezeichnungsweise nach Goldstein[7])

$$\Psi(x) = G(x) + g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x\, S(x-x')\, V(x')\, \Psi(x')$$

bzw.

$$(E\beta + P\gamma - m_1)\,\Phi(P)\,(E\beta - P\gamma - m)$$
$$= f(P) + i\lambda\pi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4k\, \Phi(P-k)\,(k^2 - \varkappa^2)^{-1} \quad (2.7)$$

wurde von Goldstein[7] und Edwards[7] untersucht. Man erhält Lösungen der homogenen Gleichungen für spezielle Fälle ($E = \varkappa = 0$, $m_1 = m_2$), aber keine Lösungen existieren, die einer allgemeinen Fredholmschen Lösung entsprechen würden — infolge von Divergenzen, die auch durch Renormierung nicht behoben werden können. Die Existenz von gebundenen Zuständen scheint der einzige Grund für dieses Versagen bekannter mathematischer Methoden zu sein. Dies zeigt sich besonders deutlich, wenn man versucht, die Gl. (2.7) für $E \neq 0$ durch Iteration nach den Lösungen für $E = 0$ zu behandeln. Die dabei auftretenden Entwicklungen der Wellenfunktion nach Potenzen von E können mit klassischen Methoden nicht zur Bestimmung des Spektrums benützt werden, da das Eigenwertproblem in solcher Weise von den Kernsingularitäten abhängt, daß obige Entwicklung divergiert. Ähnliche Verhältnisse liegen vor bei der Iteration der Integralgleichung für die Elektronen-Fortpflanzungsfunktion $S_F^A(x)$ in einem äußeren Feld:

$$S_F^A(x,y) = S_F(x-y)$$
$$-(e/2)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4z\, S_F(x-z)\, A(z)\, S_F^A(z,y).$$

Wir zeigen nun jedoch, daß es im Rahmen der Pseudofunktionstheorie durchaus möglich ist, einen gebundenen Zustand im Impulsraum nach dem Kopplungsparameter zu entwickeln. Zur Behandlung der kovarianten Integralgleichung ist eine Erweiterung des Pf-Begriffs auf vier Dimensionen erforderlich. Auf dieses Problem und auf die iterative Lösung der Gl. (2.7) gehen wir im zweiten Teil ein. Zum Beweis obiger Behauptung genügt es, den eindimensionalen Fall einer homogenen

Integralgleichung vom Faltungstyp, wie sie ja bei gebundenen Zuständen vorliegt, zu betrachten. Die Eigenfunktionen sind hier vom Typ

$$\big(\exp(-\alpha x)\big)_+ = \exp(-\alpha x) \text{ für } x \geq 0, = 0 \text{ für } x < 0,$$

und die Fourier-Transformierte von $\big(\exp(-\alpha x)\big)_+$ ist gegeben durch ($\alpha \geq 0$)

$$\bar{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(i\,k\,x)\,[\exp(-\alpha x)]_+ = i\,(k + i\,\alpha)^{-1}. \tag{2.8}$$

Die Entwicklung von $i\,(k + i\alpha)^{-1}$ nach dem Kopplungsparameter α ist $\bar{g}(k) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1}\,\alpha^n/k^{n+1}$. Nach (2.1) hat man dann zu bilden

$$\pi^{-1}\,\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\bar{g}(k)\exp(-i\,k\,x)$$
$$= -\pi^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^{n+1}\,\alpha^n\,\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\exp(-i\,k\,x)\,k^{-n-1},$$

was mit (1.24a) wegen $\varepsilon(x) = 1$ für $x > 0$ gerade $[\exp(-\alpha x)]_+$ liefert.

Ganz analoge Ergebnisse für die Entwicklung nach dem Kopplungsparameter folgen in den mehrdimensionalen Fällen. Dabei darf die Kopplungskonstante α und damit der Divergenzbereich der Reihen beliebig groß sein, d. h. die Ergebnisse sind unabhängig von der Stärke der Kopplung.

Die singulären Integralgleichungen werden durch die Pf-Vorschrift mathematisch definit, so daß z. B. cut-coff-Vorschriften, wie sie von Goldstein[7] benützt wurden, überflüssig werden. Es ist dann auch möglich, durch eine Pf-Definition der iterierten Kerne die Fredholmsche Theorie in konvergente Form zu bringen.

Wir behandeln abschließend als einfachsten Fall einer nicht-linearen Operation die Fourier-Transformierte von $K(x) = \exp\big(i\lambda\,D_{\mathrm{F}}(x)\big)$. K läßt sich darstellen in der Form

$$K(x) = (1/2\,\pi\,i)\oint \mathrm{d}z\exp(i\,\lambda\,z)\,[z + D_{\mathrm{F}}]^{-1},$$

und es interessiert nun die Funktion $f(z, x) = (z + D_{\mathrm{F}})^{-1}$ mit der Entwicklung

$$g(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-D_{\mathrm{F}})^n/z^{n+1}.$$

Die Fourier-Transformierten der Reihenglieder sind — ohne den Pseudofunktionsbegriff — divergent. Für die Fourier-Transformierte (bezüglich x) $\bar{f}(k)$ von $f(z, x)$ findet man eine Integralgleichung vom Edwardsschen[7] Typ, welche nach Okubo[10] gelöst werden kann. Die Pf-Theorie, vierdimensional erweitert, ermöglicht jedoch ohne weiteres eine direkte Behandlung der Entwicklung $g(z, x)$. Mit der in II abzuleitenden Formel ($n \geq 2$)

$$\mathrm{Pf}\int \mathrm{d}^4x\exp(i\,k\,x)\,(x_\nu^2)^{-n} \sim (-k_\nu^2/4)^{n-2}/\Gamma(n)\,\Gamma(n-1)$$

findet man dann für $\bar{f}(k)$ gerade

$$\bar{f}(k) = \delta(k)/z + c\,z^{-3-1/2}\,K_1\,(|\,k/2\,\pi\,z^{1/2}\,|)/|\,k\,|$$

in Übereinstimmung mit Okubo.

Mit den hier gegebenen Methoden lassen sich auch nukleare Wechselwirkungsprobleme behandeln, welche die in adiabatischer Näherung erhaltenen Potentiale[11] $\exp(-\alpha_n\,r)/r^n$ zum Ausgangspunkt haben. Mittels der Pseudofunktionen wurde von Jansen[12] die Streuung an einem singulären Potential der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c^n/r^n$ in erster Bornscher Näherung behandelt.

Wir haben so an einfachen Modellen gezeigt, daß es die Pseudofunktionen nicht nur ermöglichen, divergenten Entwicklungen der Quantentheorie einen Konvergenzsinn zu geben, sondern daß es die Pseudofunktionstheorie darüber hinaus gestattet, einen Störungsformalismus auch dort in mathematisch strenger und physikalisch sinnvoller Weise durchzuführen, wo die bisherigen klassischen Methoden zu Divergenzen führen.

Herrn Prof. J. Meixner danke ich für die Arbeitsmöglichkeit in seinem Institut und für sein Interesse an diesen Untersuchungen. Den Herren Dr. H. L. Jordan und A. W. Jansen bin ich für viele Diskussionen und Ratschläge zu großem Dank verpflichtet. Schließlich möchte ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft meinen Dank für ein Stipendium aussprechen.

[10] S. Okubo, Progr. Theor. Phys. **11**, 80 [1954].

[11] A. Klein, Phys. Rev. **91**, 740 [1953]; R. Jastrow, Phys. Rev. **91**, 749 [1953].

[12] A. W. Jansen, 1954, unveröffentlicht.